La partie A est indépendante de la suite du problème.

Partie A

La nuit, dans la savane, le lion se rend à la rivière pour boire et y reste un quart d'heure.
Après de nombreuses observations, on estime que l'instant T d'arrivée du lion à la rivière se situe entre 0 heure et 2 heures. T, exprimée en heures, est une variable aléatoire réelle dont une densité de probabilité est la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \text{si } t \in]-\infty, 0[, & f(t) = 0 \\ \text{si } t \in [0,2], & f(t) = \frac{3}{4}t(2-t) \\ \text{si } t \in]2,+\infty[, & f(t) = 0 \end{cases}$$

1) a) Représenter f dans un repère orthonormé.
b) Vérifier que f est une densité de probabilité.

2) Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire T.
Préciser $F(x)$, pour tout réel x.

3) Calculer $P(\frac{1}{4} \leq T \leq \frac{3}{4})$.

4) Un observateur se présente à la rivière à 0 heure 30 minutes et y reste un quart d'heure. Quelle est la probabilité pour qu'il aperçoive le lion ?

Partie B

Les lionnes chassent des gazelles et des zèbres, pour le lion. La population de gazelles et de zèbres est suffisamment importante pour que la proportion de chaque espèce reste stable malgré la chasse. La probabilité pour que les lionnes rapportent une gazelle est de $2/3$, celle pour qu'elles rapportent un zèbre est de $1/3$. Les repas du lion ne sont composés que d'une gazelle ou que d'un zèbre, à chaque repas. On suppose que la composition d'un repas est indépendante des repas précédents.

On appelle G l'événement : il a mangé une gazelle au premier repas observé, et Z l'événement : il a mangé un zèbre à ce premier repas.
1) Quelle est la probabilité pour que, lors des deux premiers repas observés, le lion ait mangé deux gazelles (et donc pas de zèbre) ?

2) Quelle est la probabilité pour que, lors des trois premiers repas, il ait mangé dans cet ordre un zèbre puis deux gazelles ?

3) Sur les quatre premiers repas observés, on considère l'événement E : il a mangé une gazelle deux fois de suite, pour la première fois, aux troisième et quatrième repas.

Calculer $P(E/G)$ et $P(E/Z)$. En déduire $P(E)$.

Partie C

On observe le lion sur une assez longue période. On désigne par Y la variable prenant pour valeur le nombre de repas nécessaires pour que, pour la première fois, le lion ait mangé deux gazelles à deux repas consécutifs. Par exemple, l'événement E (défini en B 3)) est l'événement $(Y = 4)$.

On note $u_n = P(Y = n)$ pour tout $n, n \geq 2$, et on pose $u_1 = 0$.

1) En utilisant la partie B, préciser u_2, u_3, u_4.
2) Exprimer $P(Y = n+2 \ / \ G)$ et $P(Y = n+2 \ / \ Z)$ à l'aide des termes de la suite (u_n), pour tout $n, n \geq 2$.

En déduire que, pour tout $n, n \geq 2$, on a : $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$.
Vérifier que cette relation est encore vraie pour $n = 1$.
A l'aide de cette même formule, retrouver u_4 obtenu dans la partie B, en utilisant u_2 et u_3.

Partie D

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/9 & 1/3 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que, pour tout $n, n \geq 1$, on a : $X_{n+1} = A\,X_n$.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout $n, n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2^n}{3^{n-1}} + (-1)^n \frac{2}{3^{n+1}} & \frac{2^n}{3^n} + (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n} \\ \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} + (-1)^{n+1} \frac{2}{3^{n+2}} & \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}} \end{pmatrix}$$

3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n, n \geq 1$.

Partie E

1) Vérifier que $\sum_{n=2}^{+\infty} P(Y = n) = 1$.

2) On admet la formule suivante, valable pour tout réel p appartenant à $]-1,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,p^{n-1} = \frac{1}{(1-p)^2} \quad .$$

Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail